PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA.
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ÁLGEBRA LINEAL
GUIA DE ESTUDIO

Eddy Herrera Daza eherrera@javeriana.edu.co

Ejercicios Resueltos

Demuestre que si la matriz A de orden nxn es antisimétrica y no singular, entonces la inversa de A también es también una matriz antisimétrica

Hipótesis:

La matriz A de orden nxn es antisimétrica y no singular, lo cual significa que

(1) $-A=A^T$ y (2)existe A^{-1} talque $A.A^{-1}=A^{-1}.A=I_n$

Tésis: la inversa de A también es también una matriz antisimétrica, lo cual significa que

$$-(A^{-1})=(A^{-1})^T$$

Demostración:

Como: $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ **por ser A una matriz no singular (2)**

$\Rightarrow$ $(A^{-1})^T = (-A)^{-1}$ **ya que a es antisimetrica (1)**

(tésis) $\Rightarrow$ $(A^{-1})^T = -A^{-1}$ **propiedad: por ser A no singular A y** $\alpha \neq 0, (\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$

$\therefore$ La inversa de A es antisimetrica.

Demuestre que si *u* y *v* son soluciones del sistema homogéneo AX=0, entonces *w*=*u*+*v* también es solución del sistema homogéneo AX=0

Hipótesis: u y v son soluciones del sistema, eso significa que se cumple Au=0 y que también Av=**0.**

Tésis: **w**=u+v también es solución del sistema, es decir que Aw=0

Demostración

Como Aw=A(u+v) porque w=u+v

$\Rightarrow$ Aw= Au+Av

$\Rightarrow$ Aw=0 +0 por hipótesis

Por lo tanto w tambien es solución del sistema AX=0.

Responder falso o verdadero y justifique su respuesta en cada caso:

a. Si A y B son matrices no singulares, entonces la inversa de la matriz AB es la inversa de A por la inversa de B.
   Falso: contraejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\ y\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, B^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 7 & 10\end{pmatrix}, (AB)^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 7/3 & -2\end{pmatrix} \neq A^{-1}B^{-1}=\begin{pmatrix}-11/2 & 5/2\\ 11/2 & -3/2\end{pmatrix}$$

c.Sea A= $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ A es ortogonal.

Como $AA^T=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$ entonces A es ortogonal.

Sean A y B matrices de orden nxn simétricas, tales que A.B es una matriz también simétrica. Demuestre que A.B=B.A.

- Hipótesis:

	Significa:
(1) A y B matrices de orden nxn	Del mismo orden
(2) A y B matrices simétricas	$A = A^T$ y $B = B^T$
(3) A.B es una matriz también simétrica	$(AB)^T = AB$

- Tesis:

AB=BA es decir que conmutan

El objetivo es probar que bajo las condiciones anteriores se cumple la tésis.
Ahora debemos pensar como probar que AB=BA para cualesquiera dos matrices que cumplen las condiciones citadas en la hipótesis

Como $AB= (AB)^T =B^TA^T =BA$

Dado el siguiente sistema , la ecuación que relaciona a, b y c de modo que el sistema lineal:

$$x+2y-3x=a$$
$$2x+3y+3z=b$$
$$5x+9y-6z=c$$

Sea consistente para cualesquiera valores de a, b y c que satisfagan esa ecuación es:

Solución:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & a\\ 2 & 3 & 3 & b\\ 5 & 9 & -6 & c\end{array}\right] \xrightarrow{F_1(-2)+F_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & a\\ 0 & -1 & 9 & 6-2a\\ 0 & -1 & 9 & ¡c-5a\end{array}\right] \xrightarrow{F_2(-1)+F_3}$$

$$\xrightarrow{F_1(-2)+F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & -1 & 9 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & -3a-b+2a \end{array}\right]$$ de donde se tiene,

$$x + 2y - z = a$$
$$0x - 1y + 9z = b - 2a$$
$$0x + 0y + 0z = -3a - b + 2a$$

Por lo tanto para que el sistema sea consistente se necesita que: $-3a - b + 2a = 0$

¿Para que valores de λ el siguiente sistema de ecuaciones tiene soluciones no triviales?

$$(\lambda - 3)x + y = 0$$
$$x + (\lambda - 3)y = 0$$

SOLUCION

$$\left[\begin{array}{cc|c} \lambda-3 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \lambda-3 & 0 \\ \lambda-3 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2]{F_1(3-\lambda)+F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & -\lambda^2+6\lambda-8 & 0 \end{array}\right]$$

$(-\lambda^2 + 6\lambda - 8)X = 0$; Como queremos soluciones no triviales (distintas de cero) entonces:

$$-\lambda^2 + 6\lambda - 8 = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \\ (\lambda - 4)(\lambda - 2) = 0 \\ \lambda = 4 \qquad \lambda = 2 \end{array}$$

Decir que A es no singular es equivalente a:

1. X es la única solución para el sistema $A\mathrm{X} = 0$
2. A no es equivalente por renglones a I_n
3. El sistema lineal $Ax = b$ no tiene una única solución para cada matriz b de $n \times 1$

SOLUCIÓN:

1. **Verdadero**

   Dado el sistema homogéneo

   $Ax = 0 \Rightarrow \quad A^{-1}(Ax) = A^{-1}0$ (multiplicando por A^{-1} a ambos de la igualdad ; ya que la matriz es no singular)

   $\Rightarrow A^{-1}(Ax) = 0$ Asociativa

   $\Rightarrow I_n x = 0$ Definición de inversa

   $\Rightarrow x = 0$ Propiedad de la idéntica

2.Este enunciado es **Falso**, por que si una matriz es invertible es equivalente por renglones a la matriz I_n

3.Este enunciado es **Falso**; por que si A presenta inversa entonces

$$Ax = b$$

$A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$ Multiplicado por A^{-1}

$(A^{-1}A)x = A^{-1}b$ Asociativa

$I_n x = A^{-1}b$ Definición de inversa

$x = A^{-1}b$ Propiedad de la inversa

$\Rightarrow$ El sistema $Ax = b$ presentara solución única ($x = A^{-1}b$) para cada matriz b

Determine si el sistema siguiente es consistente:

$$\begin{aligned} x_2 - 4x_3 &= 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Solución: La matriz aumentada es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

La cual es equivalente por filas con la matriz triangular:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix}$$

Para interpretarla correctamente regresamos a la notación de ecuación

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 - 4x_3 &= 8 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 5/2 \end{aligned}$$

Para la última ecuación no existen valores de x_1, x_2 y x_3 que la satisfagan, lo cual es una contradicción; por lo tanto el sistema original es inconsistente.

Resuelva el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 - 11x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solución: La matriz aumentada $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ es equivalente por filas, aplicando el método de Gauss Jordan, con la matriz escalonada reducida $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 1 & -5/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y evidentemente hay un número infinito de soluciones dadas por $\begin{aligned} x_1 &= -r/9 \\ x_2 &= 5r/9 \\ x_3 &= r \end{aligned}$; donde r es un número real cualquiera, por ejemplo si r=0 tenemos la solución trivial, si r=1, tenemos la solución (-1/9, 5/9, 1)

El sistema $\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x + 2y + z &= 3 \\ x + y + (a^2 - 5)z &= a \end{aligned}$ tiene única solución, infinitas soluciones o es inconsistente dependiendo de los valores que tome a.

¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

a. Si a es diferente de 2 y -2 existe una única solución
b. Existe una única solución si a = -2
c. Si a = 2 existen infinitas soluciones
d. Si a es diferente de -2 el sistema es inconsistente
e. Ninguna de las anteriores

Solución: Respuesta c.

Si a = 2 el sistema queda $\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ x + 2y + z &= 3 \\ x + y - z &= 2 \end{aligned}$.

Las ecuaciones 1 y 3 quedan iguales, entonces la matriz aumentada la podemos escribir $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; la cual es equivalente por filas con $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Regresando a la notación con ecuación tenemos: $\begin{aligned} x - 3z &= 1 \\ y + 2z &= 1 \end{aligned}$

Si z = r; x = 1 + 3r, y, y = 1-2r. Luego tenemos infinitas soluciones para cada valor r real, la solución $\begin{aligned} x &= 1 + 3r \\ y &= 1 - 2r \\ z &= r \end{aligned}$ nos expresa las infinitas soluciones.

Determine $B \neq O_2$ y $B \neq I_2$ tales que AB=BA. Denote:

Muestre que si u y v son soluciones del sistema lineal $AX = b$ entonces $u - v$ es una solución del sistema homogéneo asociado $AX = 0$.

Solución:

Como u y v son soluciones del sistema lineal $AX = b$ entonces $Au = b$ y $Av = b$. Así $A(u - v) = Au - Av = b - b = 0$, es decir $A(u - v) = 0$. Así $u - v$ es una solución del sistema homogéneo asociado $AX = 0$.

Si $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ y $\lambda = 4$, determinar todas las soluciones del sistema homogéneo $(\lambda I_3 - A)X = 0$.

Solución:

$$(\lambda I_3 - A)X = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se convierte la matriz $\begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ en forma escalonada reducida.

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así: $\begin{matrix} x + 3y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}$ Suponiendo que $y = r$ donde r es cualquier número real se tiene que

la solución es: $\begin{matrix} x = -3r \\ y = r \\ z = 0 \end{matrix}$.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ALGEBRA LINEAL QUIZ

PREGUNTAS ABIERTAS

1. Sean A y B matrices de orden nxn idempotentes Demuestre que:

a) A.B es idempotente si A.B=B.A. b) A^T es idempotente.

2. Indique cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas; justificando su respuesta en cada caso

   a. Si A y B son matrices de nxn, entonces $(A+B)(A+B)=A^2+2AB+B^2$
   b. Si A es una matriz simétrica y no singular , entonces la inversa de A es simétrica.
   c. Sean A, B y C matrices de nxn, si AB=BC, entonces A=C
   d. Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, A es ortogonal.
   e. Dado el sistema Homogeneo $AX = O$ con A una matriz singular entonces la solución del sistema es la trivial, osea X=O

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} y\ O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Despejar $\mathbf{X}$ de la ecuación matricial 4A$\mathbf{X}$ - b = O, utilizando la matriz inversa encuentre el valor de $\mathbf{X}$.

4. Encuentre una solución no trivial del sistema homogéneo $(-4\,I_3 - A)X = O$,

donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$, es :

5. Dado el sistema lineal

$$\begin{aligned} x + \quad + z &= 4 \\ 2x + y + 3z &= 5 \\ -3x - 3y + \left(a^2 - 5a\right) z &= a - 8 \end{aligned}$$

Encuentre los valores de a para que el sistema sea inconsitente

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
TEST ÁLGEBRA LINEAL

eherrera@javeriana.edu.co

I MATRICES

1. Sean $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}3 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 5\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}3 & -5\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ De ser posible calcular:

a. $2(AB^T)$ b. $(BD)^T+A$ c. $A^T(D-I_2)$

d. $3C^2+4I_3$ e. f(D), con $f(X)=X^2+2X$

2.Sea $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$. Determine $3A^3-2A^2+5A-4I_2$.

Sugerencia: No utilizar calculadora.

3.

a. Sea A una matriz de nxn. Usar la ley distributiva para probar que:
   - i. $A^2-I=(A-I)(A+I)$
   - ii. $A^3-I=(A-I)(A^2+A+I)$.

b. Sea A una matriz de nxn demuestre:
   - i. $A+A^T$ es también una matriz simétrica.
   - ii. $A-A^T$ es una matriz antisimétrica.
   - iii. $A.A^T$ y $A^T.A$ son matrices simétricas.

c. Sean A y B matrices de orden nxn idempotentes Demuestre que:
   - i. A.B es idempotente si A.B=B.A
   - ii. A^T también es idempotente.

d. Sean A y B matrices de nxn idempotentes. Dé una condición para que (A+B) sea también idempotente ? . Explique su respuesta.

f. Demuestre que si la matriz A de orden nxn es antisimétrica y no singular, entonces la inversa de A también es también una matriz antisimétrica.

4.

a. Si A y B son matrices nxn, ¿Cuándo ocurre que $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$?

b. Sean A, B y C matrices nxn tales que AC=CA y BC=CB. Verifique que (AB)C=C(AB).

5. Determinar una matriz B de 2×2 $B\neq 0$ y $B\neq I$, tal que $AB = BA$ donde :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿ Cuantas matrices B de este tipo hay?

II Sistemas de Ecuaciones

1.Utilizando el método de Gauss-Jordan ,indicar cuales de los siguientes sistemas de ecuaciones tienen: única solución, infinitas soluciones y cuales son inconsistentes.En el caso que el sistema presente infinitas soluciones, dar la solución paramétrica y una particular.

a.
x+3y+2z=-1
y+4z=-7
2x+7y+6z=-5
y+2z=-3

b.
12x- 5y =8
48x-20y=32

c.
x-2y-z =0
2x+y =0
4x-3y-2z=0

d.
x-y+z+2w =0
x + w=-1
y –z -w=1
x+2y =-3

2.

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \aleph = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} y\, O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

a. Despejar X de la ecuación matricial 4A X - b = O y utilizando la matriz inversa encuentre el valor de X

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \aleph = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} y\, O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Determine una solución no trivial del sistema homogéneo $4\aleph - A\aleph = O$

c. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \aleph = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

i. Despejar X de la ecuación matricial : $A^T X = C^T X + 3B$

ii. Utilizar la matriz inversa para hallar X

d. Para que valores de a ocurre que el siguiente sistema es consistente?

$$X_1 + 2X_2 + X_3 = a^2$$
$$X_1 + X_2 + 3X_3 = a$$
$$3X_1 + 4X_2 + 7X_3 = 8$$

3.Si se expresa un sistema de ecuaciones lineales en la forma $AX = B$ y A es no Singular, entonces $X = A^{-1}B$. Resuelva de esta manera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_2 + 5x_3 = -1$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -1$$
$$3x_1 + 6x_2 + 6x_3 = -3$$

4. Suponga que los tres puntos (1,-5), (-1,0) y (2,7) están en la parábola

$P(x) = ax^2 + bx + c$

a. Determine un sistema lineal de tres ecuaciones y tres incógnitas que deba resolverse para determinar a, b y c.
b. Resuelva el sistema lineal anterior usando la matriz inversa de A (matriz de coeficientes)

INVERSA DE UNA MATRIZ

Determinar todos los valores de a para los que la inversa de

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ existe y encontrar la inversa de A.



PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
FACULTAD DE CIENCIAS
PRIMER PARCIAL ALGEBRA LINEAL MARZO 2007.

Nombre ____ Grupo____________

Las preguntas abiertas deben contestarse en la hoja de examen, y para las preguntas IV y V marque la respuesta en esta hoja

PREGUNTAS ABIERTAS

I. **Plantear y resolver**

Un ebanista fabrica sillas, mesas para café y mesas para comedor, Se necesitan 10 minutos para lijar una silla, 6 para pintarla y 12 para barnizarla. Se requieren 12 minutos para lijar una mesa para café, ocho para pintarla y 12 para barnizarla. Son necesarios 15 minutos para lijar una mesa para comedor, 12 para pintarla y 18 para barnizarla. El centro de lijado está disponible 16 horas a la semana, el de pintura 11 horas a la semana y el de barnizado 18 horas. ¿Cuántas unidades de cada mueble deben fabricarse por semana de modo que las mesas de trabajo se utilicen a toda su capacidad?

II. Demuestre que si A y B son matrices de nxn , no singulares entonces:

$$adj\ (AB) = adj\ (B)\ adj\ (A)$$

III. Determinar si la siguiente matriz **BINARIA** es no singular, en caso de serlo calcule su inversa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

PREGUNTA DE SELECCIÓN MULTIPLE CON MULTIPLE RESPUESTA

Este tipo de pregunta consta de un enunciado y cuatro opciones de respuesta Identificadas con los números 1,2,3 y 4, sólo dos de estas opciones responden correctamente el enunciado. Se debe responder de acuerdo con el siguiente cuadro

Sí 1 Y 2 son correctas marque A
Si 2 Y 3 son correctas marque B
Si 3 Y 4 son correctas marque C
Sí 2 Y 4 son correctas marque D
Si 1 Y 3 son correctas marque E

IV.Sea A una matriz cuadrada talque $A\,A^t = A^t A$, entonces podemos afirmar que:

1. $\det(A) = \pm 1$ 2. $A^{-1} = A^t$ 3. A es simétrica 4. A es ídem potente

A. B. C. D. E.

PREGUNTA DE SELECCIÓN MULTIPLE CON UNICA RESPUESTA

Marque la respuesta correcta:

V. Suponga que se sabe que $\det(A) = 3$ y que la matriz B se obtiene de A mediante las operaciones:

1. Restar 2 veces la fila 1 de la fila 2
2. Intercambiar las filas 1 y 3
3. Multiplicar la tercera fila por 2
4. Sacar la transpuesta

Entonces el determinante de B es:

A. 6 B. -3 C. $\frac{3}{2}$ D. -6

NOTA
Tiempo máximo 105 minutos.
No se permite el uso de aparatos electrónicos, ni de celulares durante la realización del parcial
El uso de la calculadora es personal, e intransferible.

SOLUCION

I.

I. Respuesta A 1 y 2 son correctos

$\det(AA^t) = \det I \to \det(A)\det(A^t) = 1 \to \det(A)\det(A) = 1 \to (\det(A))^2 = 1 \to \det(A) = \pm 1$

Como $AA^t = A^tA = I \to A^{-1} = A^t$

3 y 4 son falsa porque por ejemplo la matriz $\begin{pmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ satisface la propiedad y no es simétrica ni ídem potente.

II Respuesta D.

Las propiedades del determinante nos dicen que la operación 1 no afecta el determinante, que la 2 le cambia el signo, que la 3 lo multiplica por 2 y que la, cuarta no lo afecta, de hecho entonces la respuesta, es $\det(A_1) = -6$

III Sean x el número de sillas y el número de mesas de café. Z el numero de comedores, se debe hacer la conversión del tiempo a minutos

$$\begin{cases} 10x + 12y + 15z = 960 \\ 6x + 8y + 12z = 660 \\ 12x + 12y + 18z = 1080 \end{cases}$$

Aplicando Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 12 & 15 & 960 \\ 6 & 8 & 12 & 660 \\ 12 & 12 & 18 & 1080 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.2 & 1.5 & 96 \\ 6 & 8 & 12 & 660 \\ 0 & -4 & -6 & -240 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.2 & 1.5 & 96 \\ 0 & 0.8 & 3 & 84 \\ 0 & -4 & -6 & -240 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.2 & 1.5 & 96 \\ 0 & 0.8 & 3 & 84 \\ 0 & -4 & -6 & -240 \end{array}\right) \approx$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.2 & 1.5 & 96 \\ 0 & 1 & 1.5 & 60 \\ 0 & 0.8 & 3 & 84 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.2 & 1.5 & 96 \\ 0 & 1 & 1.5 & 60 \\ 0 & 0 & 1.8 & 36 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.2 & 1.5 & 96 \\ 0 & 1 & 1.5 & 60 \\ 0 & 0 & 1.8 & 36 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.2 & 1.5 & 96 \\ 0 & 1 & 1.5 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right) \Rightarrow z = 20$$

$$y = 60 - 1.5(20) = 30$$

$$x = 96 - 1.2(30) - 1.5(20) = 30$$

II. Como A y B son no singulares entonces

$$adj(AB) = \det(AB)(AB)^{-1} = \det(A)\det(B)B^{-1}A^{-1} = \det(B)B^{-1}\det(A)A^{-1} = adj(B)adj(A)$$

III. La inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz es no singular



PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE CIENCIAS
Departamento de Matemáticas
ALGEBRA LINEAL 2o. Semestre de 2006
SOLUCION DEL PRIMER PARCIAL
2 de Septiembre

PREGUNTAS DE SELECCIÓN MULTIPLE CON UNICA RESPUESTA

1. Una solución no trivial del sistema homogéneo $(-4I_3 - A)X = O$,

donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$, es:

Solución : Como $-4I_3 - A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -5 \\ -1 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Luego $\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 0 & -5 & 0 \\ -1 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Es decir, $x_1 = -x_3 \wedge x_2 = 0$. Por tanto, $X = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, con $x_3 \in \Re$.

Una solución no trivial se obtiene, por ejemplo para $x_3 = -2$,

Respuesta : $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.

PREGUNTAS DE SELECCIÓN MULTIPLE CON MULTIPLE RESPUESTA

Si 1 y 2 son correctas marque A. Si 2 y 3 son correctas marque B.
Si 3 y 4 son correctas marque C. Si 2 y 4 son correctas marque D.
Si 1 y 3 son correctas marque E

2. Si A y B son matrices tales que AB = BA, se puede afirmar que:

Hipótesis: $AB = BA$, A y B son simetricas

Tesis:

i) AB es simétrica: $(AB)^T = AB$ Verdadera

Porque:

Como $(AB)^T = B^T A^T$ Propiedad del operador T sobre el producto

$\Rightarrow (AB)^T = BA$ Por ser matrices simétricas

$\Rightarrow (AB)^T = AB$ Hipotesis

$(AB)^k = A^k B^k$ Verdadera porque:

i) Para k = 1 se tiene que : $(AB)^k = AB$

ii) Supongamos que se cumple para k = q, con q entero positivo, esto es $(AB)^q = A^q B^q$

ahora para k = q + 1, se tiene que $(AB)^{q+1} = \underbrace{(ABAB\ldots AB)}_{\text{q veces}}(AB) = (AB)^q (AB) = (A^q B^q)(BA) = A^q (B^{q-1} AB)B$

$\Rightarrow (AB)^{q+1} = A^q (B^{q-2} AB^2)B = \cdots = A^{q+1} B^{q+1}$ Por lo tanto se cumple $\forall$k entero

3. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$ se puede afirmar que:

1. $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix} = 15$

2. $\begin{vmatrix} d+2 & e+2 & f+2 \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -7$

3. $\begin{vmatrix} g & a & d \\ h & b & e \\ i & c & f \end{vmatrix} = 5$

4. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2d & b+2e & c+2f \\ d-3g & e-3h & f-3i \end{vmatrix} = -30$

1) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix} = 15$ Es falsa porque $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix} = 3^3(5)$ utilizando propiedades del determinante

2) Es Falsa porque a pesar de que hay un intercambio de las filas 1 y 3, a una fila no se le puede sumar un número, este proceso no es válido en determinantes.

3) $\begin{vmatrix} g & a & d \\ h & b & e \\ i & c & f \end{vmatrix} = 5$ es verdadera porque esta matriz es el resultado primero de transponer la matriz original y luego de intercambiar las columnas 1 y 3 y luego volver a intercambiar las columnas 2 y 3, esto hace que el determinante de esta matriz sea el mismo de la matriz original

4) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2d & b+2e & c+2f \\ d-3g & e-3h & f-3i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ d-3g & e-3h & f-3i \end{vmatrix}_{-F1+F2} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d-3g & e-3h & f-3i \end{vmatrix}_{-F2+F3} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ -3g & -3h & -3i \end{vmatrix} = 2(-3)5$

PREGUNTAS ABIERTAS

4. Si A y B son matrices antisimétricas de orden n. Demuestre que AB – BA es antisimétrica.

Demostración

$Como : (AB - BA)^T = B^T A^T - A^T B^T = \underbrace{(-B)(-A) - (-A)(-B)}_{\text{Por la hipotesis de ser simétricas}} = BA - AB = -(AB - BA)$ $\therefore$ La matriz $(AB - BA)$ es antisimétrica

5. Dada la **matriz binaria** A= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, determine si A es no singular, si lo es halle su inversa.

Utilizando la reducción como método para encontrar la inversa de A tenemos:

$$\left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle \rightarrow_{F1\leftrightarrow F3} \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle \rightarrow_{F1+F3} \wedge F!+F2 \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right\rangle \rightarrow_{F2+F3} \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right\rangle$$

Por lo tanto A es no singular y además $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

NOTA: Tenga en cuenta que todos los cálculos se hacen utilizando aritmética Binaria

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ALGEBRA LINEAL
INGENIERÍA PRIMER PARCIAL

PREGUNTAS DE RESPUESTA UNICA

1. La ecuación que relaciona *a, b, c* de tal manera que el sistema

$$\begin{cases} 2x+2y+3z=a \\ 3x-y+5z=b \\ x-3y+2z=c \end{cases}$$ Sea consistente es:

a) $a \neq b+c$
b) a=b+c
c) $b-a-c \neq 0$
d) $b-a+c=0$
e) $b=a+c$

SOLUCION: Dado la matriz aumentada $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & a \\ 3 & -1 & 5 & b \\ 1 & -3 & 2 & c \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & c \\ 0 & 8 & -1 & b-3c \\ 0 & 0 & 0 & a-b+c \end{bmatrix}$ y utilizando la reducción, obtenemos que la condición para que el sistema sea consistente es: **a-b+c=0, que es equivalente a que b=a+c**

2. Los valores de λ para los que $\det\begin{bmatrix} \lambda+2 & -1 & 3 \\ 2 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda+4 \end{bmatrix}=0$ son:

a) -2, 1, -4
b) 2, -1, 4
c) 0, -1, -4
d) 0, 1, 4
e) -2, -1, -4

SOLUCION: Como $\det\begin{bmatrix} \lambda+2 & -1 & 3 \\ 2 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda+4 \end{bmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda+4) \Rightarrow \lambda=-4,\vee,\lambda=-1,\vee,\lambda=0$

PREGUNTA DE SELECCIÓN MÚLTIPLE CON MÚLTIPLE RESPUESTA

Este tipo de pregunta consta de un enunciado y cuatro opciones de respuesta identificadas con los números 1,2,3 y 4, sólo dos de estas opciones responden correctamente el enunciado. Se debe responder de acuerdo con el

siguiente cuadro

Si 1 y 2 son correctas marque A
Si 2 y 3 son correctas marque B
Si 3 y 4 son correctas marque C
Si 2 y 4 son correctas marque D
Si 1 y 3 son correctas marque E

3. Si la matriz A es ortogonal; es decir si $A^t = A^{-1}$ y simétrica, entonces se puede afirmar que:

1. $\left|A^2\right| = 1$ 2. A^{-1} es ortogonal 3. $\left|A\right| = 0$ 4. $AA \neq I_n$

SOLUCION:

1. $\left|A^2\right| = 1$ **ES VERDADERA** porque**:**

Como A es ortogonal, $\Rightarrow$ $A A^t=I$ y como A es simétrica

$\Rightarrow$ AA=I, luego $\left|AA\right| = \left|I\right| = 1$

2. A^{-1} es ortogonal, **ES VERDADERA**, porque:

Como: $(A^{-1})^t=(A^t)^{-1}$, propiedad de la matriz no singular

$\Rightarrow (A^{-1})^t= A^{-1}$, por ser A una matriz simétrica

$\Rightarrow (A^{-1})^t =A^t$, por ser A ortogonal

$\Rightarrow (A^{-1})^t= A$, por ser simétrica

$\Rightarrow (A^{-1})^t= (A^{-1})^{-1}$, propiedad de la s matrices no singulares

3. $\left|A\right| = 0$ **, ES FALSA** porque: Si A es Ortogonal, A es No singular, luego su determinante es diferente de cero.

4. $AA \neq I_n$, **ES FALSA** porque**:** Como A es ortogonal, $\Rightarrow$ $A A^t=I$ y como A es simétrica, $\Rightarrow$ AA=I

PREGUNTAS ABIERTAS

4. Una empresa utiliza tres tipos de materias primas M1,M2,M3 en la elaboración de dos productos P1 y P2. El número de unidades de M1,M2 y M3 usados por cada unidad de P1 son 3,2 y 4 respectivamente y por cada unidad de P2 son 4, 1 y 3 respectivamente. Suponga que la empresa produce 20 unidades de P1 y 30 unidades de P2 a la semana. Si los costos por unidad (en dólares) para M1, M2 y M3 son 6, 10 y 12 respectivamente. Encuentre utilizando operaciones entre matrices:

a. El consumo semanal de materias primas

b. Los costos de las materias primas por unidad de P1 y P2

SOLUCION:

Sean M, P y C las matrices de materias primas por producto, producción y costos por producto, así :

$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 12 \end{pmatrix}$, entonces

a. $M\ P = \begin{pmatrix} 180 \\ 70 \\ 170 \end{pmatrix}$ b. $CM = \begin{pmatrix} 86 & 70 \end{pmatrix}$

5. De las siguientes afirmaciones diga si es verdadera o falsa y justifique su respuesta

a. si $\det(A) = 0$, entonces $AX = 0$ tiene sólo la solución trivial. FALSA

Porque: Si $\det(A) \neq 0$, entonces A seria una matriz No Singular, y por lo tanto $AX = 0 \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}0 \Rightarrow X = O$, lo que significa que el sistema tendrá única solución que es la trivial.

b. Si A y B matrices de nxn idempotentes, entonces A+B también es idempotente FALSA, porque: Si tomamos A=B=I= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A+B)(A+B) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \neq (A+B)$

c. Suponga que $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, |A| = -2$ entonces el determinante de la matriz R, con $R = \begin{bmatrix} d & a & g \\ e & b & h \\ f & c & i \end{bmatrix}$ es -2. FALSA, porque: R es la matriz que resulta de transponer la matriz A y luego intercambiar de A^t la columna 1 y 2; luego el valor del determinante de R es 2

d. Si A es no singular y además simétrica, entonces la inversa de A es una matriz simétrica. VERDADERA, porque:

Como $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$, por ser A una matriz no Singular

$\Rightarrow (A^{-1})^t = A^{-1}$, por ser A simétrica

Eddy Herrera Daza. eherrera@javeriana.edu.co
Coordinadora de Algebra Lineal